

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 133.  
**A2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 51.  
**A3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 185.  
**A4.** α)  $\wedge$  , β)  $\Sigma$  , γ)  $\Sigma$  , δ)  $\Sigma$  , ε)  $\wedge$

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \geq 2 / \sqrt{x-2} + 1 > 1\} = \{x \geq 2 / \sqrt{x-2} > 0\} = \{x \geq 2 / x > 2\} = (2, +\infty)$  με  $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln \sqrt{x-2} = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$ .

**B2.** Η Συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $(2, +\infty)$  ως σύνθεση της  $x-2$  με την  $\ln x$ .

Είναι  $h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$ , για κάθε  $x > 2$  συνεπώς η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$ , οπότε και «1-1»,

δηλαδή ορίζεται η  $h^{-1}$  με  $D_{h^{-1}} = h((2, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ , διότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\ln(x-2)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty,$$

αφού αν  $u = x-2$  τότε  $\lim_{x \rightarrow 2^+} u = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$  και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-2)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) = +\infty,$$

αφού αν  $u = x-2$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

Επίσης,  $h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2 = h^{-1}(y)$

Τελικά είναι  $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$ .

**B3.** Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \ln(x-2) \cdot \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \right) = -\infty$ , διότι

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = -\infty$  από Β2,

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2 \ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$ , εφαρμόσαμε κανόνα De l' hospital.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης:

➤ Αφού η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ , πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^3 + x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^3} = 0 \Rightarrow \kappa = 0 \text{ και}$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\mu x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\mu x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \mu \frac{1}{x} \right) = \mu \cdot 0 = 0, \text{ δηλαδή ισχύει η (2).}$$

Επίσης,  $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$  και  $f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

➤ Επειδή η  $\gamma = x$  εφάπτεται της  $C_f$  στην αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ , πρέπει

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ άρα } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0, \text{ που ισχύει.}$$

**Γ2. i)** Η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως ρητή και παραγωγίσιμη με  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Πιθανές θέσεις τ.α. οι ρίζες της  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$0$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		τ.ε.	τ.μ.	

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι :

Γνήσια αύξουσα στο  $[-1, 1]$

Γνήσια φθίνουσα στα  $(-\infty, -1)$ ,  $[1, +\infty)$

Επίσης η  $C_f$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα :

Τοπικό Ελάχιστο στο  $x_1 = -1$  με  $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Τοπικό Μέγιστο στο  $x_2 = 1$  με  $f(1) = \frac{1}{2}$

**ii)** Για το σύνολο τιμών έχω

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f((-\infty, -1]) \cup f([-1, 1]) \cup f((1, +\infty)) = \\ &= [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) \cup [f(-1), f(1)] \cup (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] = \\ &= [-\frac{1}{2}, 0) \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}] = \\ &= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

διότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$  και ανάλογα  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

Επιπλέον,

$\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$ , για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει όταν  $\frac{1}{2} + \alpha^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ .

➤ Αν  $\alpha \neq 0$  τότε  $\frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$  και η εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$  είναι αδύνατη αφού  $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(\mathbb{R})$ .

➤ Αν  $\alpha = 0$  τότε η εξίσωση γίνεται  $f(x) = \frac{1}{2}$  και έχει μία λύση την  $x = 1$ , διότι  $\frac{1}{2} \in f([-1, 1])$  και  $f$  γνησίως μονότονη οπότε «1-1» στο  $[-1, 1]$ .

**Γ3. i)**  $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1} + x^{2n+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2n+1} dx = \left[ \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$ .

**ii)** Για το  $I_0$  κάνω αντικατάσταση στο αρχικό ολοκλήρωμα  $n=0$  οπότε γίνεται

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \ln 2.$$

Σύμφωνα με το Γ3i, έχουμε,

➤ Για  $n=0$  :  $I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$  και

➤ Για  $n=1$  :  $I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$ .

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Θεωρώ τη  $\phi$  με  $\phi(x) = g(x) + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$\phi$  συνεχής ως άθροισμα των συνεχών  $g(x)$ ,  $x$

$\phi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , σύμφωνα με την υπόθεση της άσκησης.

Επίσης, η συνάρτηση  $\phi'$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα των συνεχών  $g'(x)$ , 1.

Άρα, η  $\phi'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$  οπότε η  $\phi$  είναι γνησίως μονότονη και άρα «1-1» στο  $\mathbb{R}$ .

Συμπεπώς :

Η  $\phi$  συνεχής στο  $[-1,0]$  με  $\phi(-1) \cdot \phi(0) = (g(-1)-1) \cdot g(0) < 0$

διότι  $0 < g(-1) < 1 \Leftrightarrow -1 < g(-1)-1 < 0$  και  $0 < g(0) < 1$ .

Άρα, σύμφωνα με το θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (-1,0)$  με  $\phi(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$ .

Το  $x_1$  είναι μοναδικό διότι η  $\phi$  είναι «1-1».

**Δ2.** Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, \frac{\pi}{2})$  θα είναι παραγωγίσιμη και στο 0 δηλαδή

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x)+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x(g(x) + x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) \Rightarrow \\ 0 &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - \kappa = 0 \Rightarrow \\ \kappa &= 3 \end{aligned}$$

**Δ3. i)** Σύμφωνα με την υπόθεση είναι  $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$ , στο διάστημα  $[0, \frac{\pi}{2})$  και συνεχής στο  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}) \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Το  $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1$  παραγοντοποιήθηκε ως δευτεροβάθμιο πολυώνυμο με μεταβλητή το  $\sigma\upsilon\nu x$ .

Άρα, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, \frac{\pi}{2})$ , οπότε θα έχει σύνολο τιμών

$$f([0, \frac{\pi}{2})) = [f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)) = [0, +\infty), \text{ διότι}$$

$$f(0)=0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty, \text{ είναι γνωστό ότι } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty.$$

δηλαδή  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ .

**ii)** Είναι  $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$ . Όμως,  $\frac{\pi}{3} \in f([0, \frac{\pi}{2}))$  οπότε υπάρχει  $x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$  ώστε  $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ .

Το  $x_2$  είναι μοναδικό, διότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη και άρα «1 - 1» στο  $[0, \frac{\pi}{2})$ .

**Δ4. i)**  $f(x) = x^2(g(x) + x) = x^2\phi(x)$ ,  $x \in [x, 0]$ , σύμφωνα με το Δ1. Επίσης, σύμφωνα με το Δ1, η  $\phi$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  κι επειδή  $-1 < 0$  και  $\phi(-1) < \phi(0)$ , συμπεραίνουμε ότι η  $\phi$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Επομένως,  $\phi([x_1, 0]) = [\phi(x_1), \phi(0)] = [0, \phi(0)]$ , δηλαδή  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [x_1, 0]$ .

**ii)** Εφόσον σύμφωνα με την υπόθεση της άσκησης τα χωρία είναι ισομβαδικά ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 |f(x)| dx &= \int_0^{f(x_2)} |f(x)| dx \Rightarrow \\ \int_{x_1}^0 f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 &= \left[ -2\sigma\nu\nu x - \ln(\sigma\nu\nu x) - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx &= -1 - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 + \frac{x_1^4}{4} = \\ \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx &= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \end{aligned}$$

Επομένως, το ζητούμενο γίνεται :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx &= \\ [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx &= \\ -x_1^3 \cdot g(x_1) - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx &= \\ = -x_1^3 \cdot (-x_1) - 3 \left( 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \right) &= \\ x_1^4 - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3x_1^4}{4} &= \\ = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 - 3 \ln 2. \end{aligned}$$

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ «ΔΙΑΣΤΑΣΗ»