ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 65.

Α2. Σχολικό σελ. 87.

Α3. Σχολικό σελ. 27.

Α4. α) Λάθος β) Σωστή γ) Σωστή δ) Λάθος ε) Σωστή

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right)' = x^2 - 2x - 3, x \in \mathbb{R}$.

Β2. Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.
Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$, οπότε η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm 4}{2}$, δηλαδή $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.
Πίνακας προσήμων f' – μονοτονίας f:

x	-∞		-1		3		+∞
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f		↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

<u>Μονοτονία</u>: η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (–∞,–1] και [3,+∞) ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [–1,3].

<u>Ακρότατα</u>: η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x = –1 το
$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$ και
η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x = 3 το
$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$.

Β3. Έστω ε:y=λx+β η εξίσωση της εφαπτομένης. Το Α(0,f(0)) σημείο επαφής οπότε ισχύει $\lambda = f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$. Επίσης, έχουμε $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$.
$A(0,1) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 1 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$ οπότε ε:y = –3x + 1 η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.

Β4. $\lim_{x \to -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x - 3) = -4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} t_i}{v} = \frac{23+\kappa}{7}$ και ισχύει $\bar{x} = 4$ οπότε έχουμε: $\frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23 + \kappa = 28 \Leftrightarrow \kappa = 5.$

Γ2. Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7. Επειδή ν = 7 είναι περιττός ισχύει $\delta = t_4 = 4$.

Γ3. $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{(-4)^2+(-1)^2+0^2+0^2+1^2+1^2+3^2}{7} = \frac{28}{7} = 4.$

Γ4. Έχουμε $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$ οπότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$. Επειδή CV > 10%, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε: $E = 100 \Leftrightarrow x \cdot y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$ με x > 0 οπότε και y > 0 διότι x, y διαστάσεις ορθογωνίου.
Για τη περίμετρο ισχύει $\Pi = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$ οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι $\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, x > 0.$

Δ2. Έχουμε: $\Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2-200}{x^2}, x > 0.$
Λύνω $\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$ διότι x > 0.
Πίνακας προσήμων Π' - μονοτονίας Π:

x	0		10		+∞
Π'	‖	−	0	+	
Π	‖	↘		↗	

<u>Μονοτονία</u>: Η Π είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 10]. Η Π είναι γνησίως αύξουσα στο [10, +∞).
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η περίμετρος γίνεται ελάχιστη όταν x = 10 οπότε $y = \frac{100}{10} = 10$, δηλαδή οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, επομένως το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο.

Δ3. Ισχύει $x_1, x_2 \in (0, 10)$ όπου Π είναι γνησίως φθίνουσα οπότε έχουμε:
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0.$
Επίσης, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0.$
Επομένως, το πρόσημο της παράστασης $A = \frac{\Pi(x_1)-\Pi(x_2)}{x_1-x_2}$ είναι αρνητικό.

Δ4. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10} = \lim\limits_{x\to 10} \frac{\frac{2x^2-200}{x^2}}{\sqrt{10x}-10} = \lim\limits_{x\to 10} \frac{2x^2-200}{x^2(\sqrt{10x}-10)} =$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{(2x^2-200)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}-10)(\sqrt{10x}+10)} = \lim_{x\to 10} \frac{2(x^2-100)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(10x-100)} =$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{10x^2(x-10)} = \lim_{x\to 10} \frac{2(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{10x^2} = \frac{2\cdot 20\cdot 20}{10\cdot 100} = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}.$$